

# 自己回帰過程のスペクトル分解 — 波素分析 —

清野 健

February 18, 2011

ここでは、観測された時系列に自己回帰モデル (auto-regressive model, 以下では AR モデル) をあてはめ、時系列に含まれる周期的変動成分のパワーを調べる方法を解説する。ここで使う自己回帰過程のパワースペクトルの分解法は、波素分析と呼ばれた方法と同一であるが、以下では、解析内容を反映した素直な表現として AR スペクトル分解と呼ぶ。時系列解析の手順は以下である。

1. サンプリング間隔  $\Delta t$  で観測された  $N$  点の時系列  $\{x(\Delta t), x(2\Delta t), x(3\Delta t), \dots, x(N\Delta t)\}$  から Burg 法で AR モデル

$$x(t) = \sum_{m=1}^M a_m x(t - m\Delta t) + \epsilon(t)$$

のパラメタを推定する。AR モデルの次数  $M$  は、最終予測誤差 (Final Prediction Error, FPE)

$$\text{FPE}(M) = \hat{\sigma}_M^2 \frac{1 + M/N}{1 - M/N}$$

が最小になるように決める。ここで、 $\hat{\sigma}_M^2$  は、予測誤差の分散の推定値を表わす。結果として、時系列のパワースペクトル  $P(f)$  は、

$$P(f) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left| 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-i2\pi f m \Delta t} \right|^2}$$

となる。AR 過程とそのパワースペクトルの関係については、多くの教科書、参考書を見つけることができる [1, 2, 3]。したがって、本解説では詳細には触れない。

2. AR モデルの特性方程式

$$A(z^{-1}) = 1 - \sum_{m=1}^M a_m z^{-m} = 0$$

の根を求め、次の形の自己相関関数

$$C(k\Delta t) = \sum_{j=1}^{m_1} F_j e^{-|k|\alpha_j \Delta t} + \sum_{l=1}^{m_2} e^{-|k|\beta_l \Delta t} \{G_l \cos(2\pi f_l k \Delta t) - H_l \sin(2\pi f_l |k| \Delta t)\}$$

のパラメタを求める。さらに、自己相関関数とパワースペクトルの関係に基づき、パワースペクトル成分を分解し、各成分のパワーを求める。

2 のスペクトル分解の手続きについては、日本語の解説が非常に少ない (私自身は見つけれなかった)。そこで、本解説では AR スペクトル分解の理論を中心に詳しく説明する。AR スペクトル分解の理論は

L. H. Zetterberg, "Estimation of parameters for a linear difference equation with application to EEG analysis", Math. Biosci., 5, 227-275 (1979)

において提案されているものである。この論文では ARMA 過程が議論されているが、本解説では AR 過程に限ってスペクトル分解を考える。

# 1 ARモデルのパワースペクトルと自己相関関数

まずは, ARモデルのパワースペクトル密度関数と自己相関関数について整理する. 以下では, パワースペクトル密度関数のことをパワースペクトルと呼ぶ.

サンプリング時間間隔  $\Delta t$  で測定された時系列  $\{x(\Delta t), x(2\Delta t), x(3\Delta t), \dots, x(N\Delta t)\}$  が,  $M$  次の ARモデル

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 x(t - \Delta t) + a_2 x(t - 2\Delta t) + \dots + a_M x(t - M\Delta t) + \epsilon(t) \\ &= \sum_{m=1}^M a_m x(t - m\Delta t) + \epsilon(t), \end{aligned} \quad (1)$$

の実現値であると仮定する. ここで, 係数  $\{a_1, \dots, a_M\}$  は実定数,  $\epsilon(t)$  は平均 0, 分散  $\sigma^2$  の白色ノイズである. このとき, このモデルのパワースペクトル  $P(f)$  は,

$$P(f) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left| 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-i2\pi f m \Delta t} \right|^2} \quad (2)$$

になる (付録 A 参照). ここで, 特性関数

$$A(z^{-1}) = 1 - \sum_{m=1}^M a_m z^{-m} \quad (3)$$

を定義すれば,

$$\begin{aligned} P(f) &= \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left\{ 1 - \sum_{m=1}^M a_m (e^{i2\pi f \Delta t})^{-m} \right\} \left\{ 1 - \sum_{m=1}^M a_m (e^{i2\pi f \Delta t})^m \right\}} \\ &= \frac{\sigma^2 \Delta t}{A(z^{-1}) A(z)} \Big|_{z=\exp(i2\pi f \Delta t)} \end{aligned} \quad (4)$$

と表わすことができる. このとき,  $z$  は複素数平面上の単位円上にある.

ARモデルの自己相関関数  $C(\tau) = C(k\Delta t)$  は, Wiener-Khinchine の定理の関係式

$$C(k\Delta t) = \int_{-\frac{1}{2\Delta t}}^{\frac{1}{2\Delta t}} P(f) e^{i2\pi f k \Delta t} df \quad (5)$$

を使えば,

$$\begin{aligned} C(k\Delta t) &= \int_{-\frac{1}{2\Delta t}}^{\frac{1}{2\Delta t}} \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left| 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-i2\pi f m \Delta t} \right|^2} e^{i2\pi f k \Delta t} df \\ &= \frac{\sigma^2}{i2\pi} \int_{|z|=1} \frac{1}{A(z^{-1}) A(z)} z^{k-1} dz \end{aligned} \quad (6)$$

と表わすことができる. 最後の式は,  $e^{i2\pi f \Delta t} = z$  で置換した形である.

さらに, ここでは自己相関関数が次の形で表わされる場合を考える.

$$C(k\Delta t) = \sum_{j=1}^{m_1} F_j e^{-|\alpha_j| k \Delta t} + \sum_{l=1}^{m_2} e^{-|\beta_l| k \Delta t} \{G_l \cos(2\pi f_l k \Delta t) - H_l \sin(2\pi f_l |k| \Delta t)\} \quad (7)$$

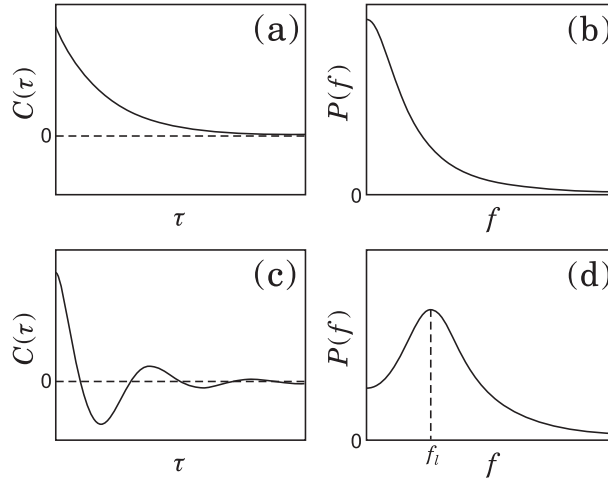


Figure 1: 自己相関関数とパワースペクトルの関係 . (a)  $C_j(\tau) = F_j e^{-\alpha_j |\tau|}$  の概形 . (b) (a) に対応するパワースペクトル ((10) 式) の概形 . (c)  $C_l(\tau) = e^{-|\beta_l| \tau} \{G_l \cos(2\pi f_l k \Delta t) - H_l \sin(2\pi f_l |k| \Delta t)\}$  の概形 . (d) (c) に対応するパワースペクトル ((11) 式) の概形 .

このとき , (7) 式の各項に対応するパワースペクトルとそのパワーは , Wiener-Khintchine の定理の関係式

$$P(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k\Delta t) e^{-i2\pi f k \Delta t} \quad (8)$$

$$\simeq 2\Delta t \int_0^{\infty} C(k\Delta t) \cos(2\pi f k \Delta t) dk \quad (9)$$

により , 次のようになる .

1.  $C_j(k\Delta t) = F_j e^{-|\alpha_j| k \Delta t}$  のとき (Fig. 1(a)) , 対応するパワースペクトルは ,

$$P_j(f) = \frac{2\alpha_j F_j}{\alpha_j^2 + 4\pi^2 f^2}, \quad (10)$$

である (Fig. 1(b)). この成分のパワーは ,  $\Delta t \rightarrow 0$  のとき ,  $F_j$  になる .

2.  $C_l(k\Delta t) = e^{-|\beta_l| k \Delta t} \{G_l \cos(2\pi f_l k \Delta t) - H_l \sin(2\pi f_l |k| \Delta t)\}$  のとき (Fig. 1(c)) , 対応するパワースペクトルは ,

$$P_l(f) = G_l \left\{ \frac{\beta_l}{\beta_l^2 + 4\pi^2 (f + f_l)^2} + \frac{\beta_l}{\beta_l^2 + 4\pi^2 (f - f_l)^2} \right\} - H_l \left\{ \frac{2\pi (f + f_l)}{\beta_l^2 + 4\pi^2 (f + f_l)^2} - \frac{2\pi (f - f_l)}{\beta_l^2 + 4\pi^2 (f - f_l)^2} \right\}, \quad (11)$$

である (Fig. 1(d)). この成分のパワーは ,  $\Delta t \rightarrow 0$  のとき ,  $G_l$  になる . しかし , すべての周波数  $f$  で正の値をとるパワースペクトルが存在するためには ,  $H_l$  の絶対値は  $G_l$  の値と比べてある程度小さくなければならない .

$H_l = 0$  でない場合 , (7) 式の第 2 項の三角関数の和は ,

$$R_l = \sqrt{G_l^2 + H_l^2}$$

$$\Phi_l = \tan^{-1} \frac{H_l}{G_l}$$

として,

$$G_l \cos(2\pi f_l k \Delta t) - H_l \sin(2\pi f_l k \Delta t) = R_l \cos(2\pi f_l k \Delta t + \Phi_l) \quad (12)$$

のように変形できる。したがって、相関関数の周期成分に位相のズレが生じる。このズレは、自己相関関数の  $k = 0$  近傍におけるピークとその次の極小値をとる時間間隔を変化させるので、時系列の振動周期は  $1/f_l$  ではなくなる。したがって、(7) 式の第 2 項に対応するパワースペクトルには、(11) 式と比べ中心周波数のピークのズレが生じる。傾向としては、 $H_l > 0$  のとき、時系列の振動周期は  $H_l = 0$  のときより短く、パワースペクトルのピーク周波数は  $1/f_l$  より大きくなる。 $H_l < 0$  のときは、これと逆の傾向になる。定量的にパワースペクトルの中心周波数のズレを見積もるために、 $f > 0$  のとき、

$$P(f) = \frac{\beta_l G_l}{\beta_l^2 + 4\pi^2 (f - f_l)^2} + \frac{2\pi (f - f_l) H_l}{\beta_l^2 + 4\pi^2 (f - f_l)^2} \quad (13)$$

が極大値をとる条件 ( $dP(f)/df = 0$ ) を考える。このとき、 $H_l > 0$  であれば、

$$f_l^* = f_l + \frac{\beta_l G_l}{2\pi H_l} \left( \sqrt{1 + \frac{H_l^2}{G_l^2}} - 1 \right), \quad (14)$$

$H_l < 0$  であれば、

$$f_l^* = f_l - \frac{\beta_l G_l}{2\pi |H_l|} \left( \sqrt{1 + \frac{H_l^2}{G_l^2}} - 1 \right) \quad (15)$$

において、(13) 式は極大値をとる。したがって、 $H_l \neq 0$  のときのパワースペクトルの中心周波数は上の (14), (15) 式で与えられる。

## 2 AR モデルと自己相関関数のパラメタの関係

ここでは、AR モデルの係数と (7) 式のパラメタの関係をまとめる。(7) 式のパラメタ  $\alpha_j, \beta_l, f_l, F_j, G_l, H_l$  は、AR モデルの特性関数  $A(z^{-1})$  ((3) 式) を 0 とした特性方程式

$$A(z^{-1}) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_M z^{-M} = 0 \quad (16)$$

の根を使って表わされる。ここでは、(16) 式は重根をもたず、自己相関関数が (7) 式で表わされることを仮定する。この場合、(16) 式は  $M$  個の異なる根  $\{z_1, z_2, \dots, z_M\}$  をもつ。そのうち、実数根の個数を  $m_1$ 、複素数根の個数を  $2m_2$  とすれば、 $m_1 + 2m_2 = M$  が成り立つ。

ここでは、特性方程式 (16) の実数根を、

$$z_j^{(0)} = e^{-\alpha_j \Delta t}, \quad (j = 1, 2, \dots, m_1) \quad (17)$$

複素数根を

$$z_l^{(\pm)} = e^{-\beta_l \Delta t \pm i 2\pi f_l \Delta t}, \quad (l = 1, 2, \dots, m_2) \quad \left( 0 \leq f_l \leq \frac{1}{2\Delta} \right) \quad (18)$$

と表わす。(17) 式では正の実数解のみを考えている。仮に、特性方程式が負の実数解をもてば、時系列には周期  $2\Delta t$  で振動する成分が含まれることを意味している。このようにサンプリング時間間隔  $\Delta t$  に同期した振動成分の存在は、ここでは考えない。後で示すように、(17), (18) 式の  $\alpha_j, \beta_l, f_l$  が、(7) 式のパラメタに一致する。(17), (18) 式を、これらのパラメタについて解けば、

$$\begin{aligned} \alpha_j &= -\frac{\ln z_j^{(0)}}{\Delta t} \\ \beta_j &= -\frac{\ln |z_l^{(+)}|}{\Delta t} = -\frac{\ln |z_l^{(-)}|}{\Delta t} \\ f_l &= \frac{\arg(z_l^{(+)})}{2\pi \Delta t} = -\frac{\arg(z_l^{(-)})}{2\pi \Delta t} \end{aligned}$$

となる．

さらに，

$$D(z) = \frac{z^{M-1}}{A(z) \frac{d}{dz} \{z^M A(z^{-1})\}} = \frac{1}{\left(1 - \sum_{m=1}^M a_m z^m\right) \left(M - \sum_{m=1}^M a_m (M-m) z^{-m}\right)} \quad (19)$$

として  $D(z)$  を定めれば，(7) 式の残りのパラメタは，

$$F_j = \sigma^2 D(z_j^{(0)}) \quad (20)$$

$$G_l = 2\sigma^2 \operatorname{Re} \left[ D(z_l^{(+)}) \right] = 2\sigma^2 \operatorname{Re} \left[ D(z_l^{(-)}) \right] \quad (21)$$

$$H_l = 2\sigma^2 \operatorname{Im} \left[ D(z_l^{(+)}) \right] = -2\sigma^2 \operatorname{Im} \left[ D(z_l^{(-)}) \right] \quad (22)$$

と表わされる（導出については付録 B 参照）．

### 3 数値例

ここでは，具体的な数値を AR モデルに設定し，AR スペクトル分解のパラメタがどのように計算されるかを説明する．以下で記述する有限桁の数値については，末尾桁が四捨五入されている．

#### 3.1 3次 AR 過程

ここでは， $\Delta t = 1$  とし， $x(t) = 1.8x(t-1) - 1.495x(t-2) + 0.4225x(t-3) + \epsilon(t)$  で記述される AR 過程を考える．

特性方程式と特性根 この場合の特性方程式は，

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 - 1.8z^{-1} + 1.495z^{-2} - 0.4225z^{-3} = 0 \\ z^{-3}(z^3 - 1.8z^2 + 1.495z - 0.4225) &= 0 \\ z^{-3}(z - 0.5)(z^2 - 1.3z + 0.845) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

となるので，特性根は，

$$z = 0.5, \quad 0.65 \pm 0.65i$$

である．

実数根に対応するパワースペクトル 例では，1つの実数根  $z_1^{(0)} = 0.5$  をもつ．(17) 式から  $\alpha_1$  を求めると（ここでは， $\Delta t = 1$ ），

$$\begin{aligned} 0.5 &= e^{-\alpha_1} \\ \alpha_1 &= -\ln 0.5 = 0.693147 \end{aligned} \quad (24)$$

となる．また， $F_1$  については，(19) 式

$$D(z) = \frac{1}{(1 - 1.8z + 1.495z^2 - 0.4225z^3)(3 - 3.6z^{-1} + 1.495z^{-2})} \quad (25)$$

を使って，

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma^2 D(0.5) \\ &= 1.33463 \sigma^2 \end{aligned} \quad (26)$$

と求められる．ここでは， $\epsilon(t)$  の分散が  $\sigma^2$  である．パラメタ  $\alpha_1, F_1$  を (10) 式に代入すれば，この実数根に対応するパワースペクトルが求められる (Fig. 2(b)) ．

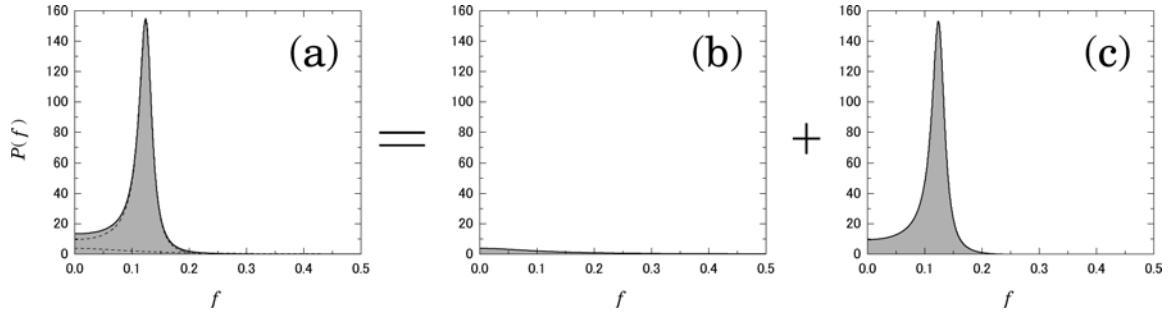


Figure 2: (a) 3次AR過程  $x(t) = 1.8x(t-1) - 1.495x(t-2) + 0.4225x(t-3) + \epsilon(t)$  のパワースペクトル．(b) 特性方程式の実数根に対応するパワースペクトル．(c) 特性方程式の複素数根に対応するパワースペクトル．

複素数根に対応するパワースペクトル 複素数根  $z_1^{(\pm)} = 0.65 \pm 0.65i$  については，

$$\left| z_1^{(\pm)} \right| = 0.91924, \quad \arg\left(z_1^{(\pm)}\right) = \pm 0.78540$$

であるので，

$$\beta_1 = -\ln|z_1| = 0.084209 \quad (27)$$

$$f_1 = \frac{\arg\left(z_1^{(+)}\right)}{2\pi} = 0.125 \quad (28)$$

となる．また， $G_1, H_1$  については，

$$D\left(z_1^{(+)}\right) = 6.2895 + 1.2337i$$

と，(21), (22) 式により，

$$G_1 = 12.579 \sigma^2 \quad (29)$$

$$H_1 = -2.4674 \sigma^2 \quad (30)$$

となる．これらのパラメタを，(11) 式に代入すれば，複素数根に対応するパワースペクトルが求められる (Fig. 2(c))．

このパワースペクトルがピークをとる周波数  $f_1^*$  は，(15) 式により，

$$f_1^* = 0.12370 \quad (31)$$

と見積もられる．この場合， $f_1 = 0.125$  との差はわずかであるが， $H_1$  の絶対値と  $G_1$  の比が大きくなると，中心周波数の  $f_1$  からのズレは大きくなる．

## 4 実験データへの応用

ここでは，RQ3の時系列のARスペクトル分解の例を紹介する．ここでは， $M = 7$  でFPEが最小であったので，7次のARモデルを仮定した．ARスペクトル分解により，パワースペクトルは4つの成分に分解された．しかし，主要な成分は2つであり (Table 1)，それ以外の2つの要素のパワーの寄与率はほぼ0%であった．Table 1に示した成分のパワースペクトルは，Fig. 3の破線と一点鎖線である．この時系列には，周期  $1/f_1^* \approx 18$  分の振動成分が含まれることが示唆された．

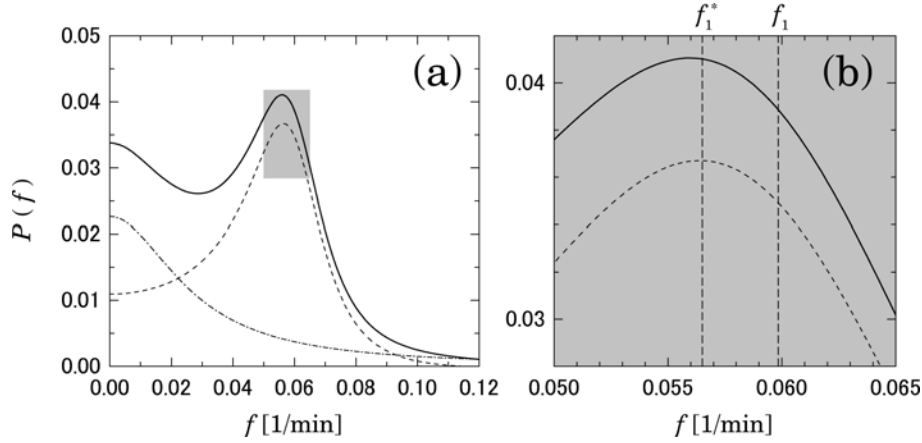


Figure 3: (a) RQ3 のパワースペクトル (実線) と成分に分解したパワースペクトル (破線, 1 点鎖線). (b) (a) の灰色の部分の拡大. 周期振動成分の中心周波数はパラメタ  $f_1$  ではなく,  $f_1^*$  になる.

Table 1: RQ3 のパワースペクトルの主要な成分のパラメタ

ID	%power	$\alpha_j$	$\beta_l$	$f_l$	$F_j$	$G_l$	$H_l$	$f_l^*$
1	62	—	0.0945	0.0598	—	0.00309	-0.00141	0.0565
2	38	0.167	—	—	0.00190	—	—	—

## A インパルス応答とパワースペクトル

線形システムにおいて入力  $x(t)$  と出力  $y(t)$  の関係が,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u) du \quad (32)$$

と記述できるとき,  $x(t)$  のパワースペクトル  $P_x(f)$  と  $y(t)$  のパワースペクトル  $P_y(f)$  の関係は,

$$A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \quad (33)$$

( $i$  は虚数単位) を使って,

$$P_y(f) = |A(f)|^2 P_x(f) \quad (34)$$

と表わされる.  $h(u)$  は, インパルス応答関数と呼ばれる.

また, サンプリング間隔が  $\Delta t$  の離散的な時系列の入出力関係

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m x(t - m\Delta t) \quad (35)$$

については, (33), (34) 式に対応する結果は, それぞれ,

$$A(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{-i2\pi f m \Delta t} d\tau \quad (36)$$

$$P_y(f) = |A(f)|^2 P_x(f) \quad (37)$$

になる。ただし、

$$-\frac{1}{2\Delta t} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t}$$

である。

AR モデルのパワースペクトル 応用例として、AR モデル ((1) 式) のパワースペクトル  $P_x(f)$  を求める。(1) 式を変形して、

$$y(t) = x(t) - \sum_{m=1}^M a_m x(t - m\Delta t) = \epsilon(t) \quad (38)$$

とし、この式を入出力関係とみなすと、 $x(t)$  と  $y(t)$  のパワースペクトルには、(37) 式の関係がある。このとき、(36) 式は

$$A(f) = 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-i2\pi f m \Delta t} \quad (39)$$

になる。一方、(38) 式の最右辺にあるように、 $y(t)$  のパワースペクトル  $P_y(f)$  は白色ノイズ  $\epsilon(t)$  のパワースペクトルに等しいので、

$$P_y(f) = \sigma^2 \Delta t \quad (40)$$

である。したがって、(38) 式をパワースペクトルの関係式で表わせば、

$$P_y(f) = \left| 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-i2\pi f m \Delta t} \right|^2 P_x(f) = \sigma^2 \Delta t$$

となる。これを  $P_x(f)$  について解くと、

$$P_x(f) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left| 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-i2\pi f m \Delta t} \right|^2} \quad (41)$$

がえられる。

## B AR モデルの特性根と自己相関関数

ここでは、AR モデルの (6) 式の自己相関関数の表現

$$C(k\Delta t) = \frac{\sigma^2}{i2\pi} \int_{|z|=1} \frac{1}{A(z^{-1})A(z)} z^{k-1} dz \quad (42)$$

と (7) 式の表現

$$C(k\Delta t) = \sum_{j=1}^{m_1} F_j e^{-|k|\alpha_j \Delta t} + \sum_{l=1}^{m_2} e^{-|k|\beta_l \Delta t} \{G_l \cos(2\pi f_l k \Delta t) - H_l \sin(2\pi f_l |k| \Delta t)\} \quad (43)$$

の関係を導く。ここでは、AR モデル ((1) 式) の特性方程式

$$A(z^{-1}) = 1 - \sum_{m=1}^M a_m z^{-m} = 0 \quad (44)$$

は重根をもたず、AR モデルの定常性から、すべての根  $\{z_1, z_2, \dots, z_M\}$  が単位円の内側 ( $|z_m| < 1$ ) にあることを仮定する。



上の条件が成り立ち、 $k \geq 1$  のとき<sup>1</sup>、(45) 式 of 非積分関数は、 $M$  個の特性根の位置に 1 位の極をもつので、(45) 式の線積分は留数定理を使って計算できる。つまり、

$$\begin{aligned} C(k\Delta t) &= \frac{\sigma^2}{i2\pi} \int_{|z|=1} \frac{1}{A(z^{-1})A(z)} z^{k-1} dz \\ &= \sigma^2 \sum_{m=1}^M (z - z_m) \frac{z^{k-1}}{A(z^{-1})A(z)} \Big|_{z=z_m} \end{aligned} \quad (45)$$

となる。ここで、和をとる各項は、

$$\begin{aligned} (z - z_m) \frac{z^{k-1}}{A(z^{-1})A(z)} \Big|_{z=z_m} &= (z - z_m) \frac{z^{k-1}}{\left(1 - \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}\right) A(z)} \Big|_{z=z_m} \\ &= (z - z_m) \frac{z^{k-1} z^M}{z^M \left(1 - \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}\right) A(z)} \Big|_{z=z_m} \\ &= \frac{(z_m)^{k+M-1}}{(z_m - z_1)(z_m - z_2) \cdots (z_m - z_{m-1})(z_m - z_{m+1}) \cdots (z_m - z_M) A(z_m)} \\ &= \frac{(z_m)^{k+M-1}}{A(z_m) \left\{ \frac{d}{dz} z^M A(z^{-1}) \right\} \Big|_{z=z_m}} \\ &= \frac{z^k z^{M-1}}{A(z) \left\{ M z^{M-1} - \sum_{m=1}^M a_m (M - m) z^{M-m-1} \right\}} \Big|_{z=z_m} \\ &= \frac{z^k}{A(z) \left\{ M - \sum_{m=1}^M a_m (M - m) z^{-m} \right\}} \Big|_{z=z_m} \end{aligned}$$

と表わすことができるので、(45) 式は、

$$\begin{aligned} C(k\Delta t) &= \sigma^2 \sum_{m=1}^M \frac{z^k}{A(z) \left\{ M - \sum_{m=1}^M a_m (M - m) z^{-m} \right\}} \Big|_{z=z_m} \\ &= \sigma^2 \sum_{m=1}^M D(z_m) (z_m)^k \end{aligned} \quad (46)$$

となる ( $D(z)$  の定義は (19) 式)。

<sup>1</sup>  $k \leq 0$  では、 $z = 0$  も極となるので、この条件が必要になる。

特性方程式 (44) の実数根が,

$$z_j^{(0)} = e^{-\alpha_j \Delta t}, \quad (j = 1, 2, \dots, m_1) \quad (47)$$

と表わせるとき, (46) 式の項は,

$$D \left( z_j^{(0)} \right) \left( z_j^{(0)} \right)^k = D \left( z_j^{(0)} \right) \left( e^{-\alpha_j \Delta t} \right)^k = D \left( z_j^{(0)} \right) e^{-\alpha_j k \Delta t} \quad (48)$$

になる. また, 複素数根を

$$z_l^{(\pm)} = e^{-\beta_l \Delta t \pm i 2\pi f_l \Delta t}, \quad (l = 1, 2, \dots, m_2) \quad (49)$$

と表わせるとき,

$$\begin{aligned} D \left( z_l^{(\pm)} \right) \left( z_l^{(\pm)} \right)^k &= D \left( z_l^{(\pm)} \right) \left( e^{-\beta_l \Delta t \pm i 2\pi f_l \Delta t} \right)^k \\ &= D \left( z_l^{(\pm)} \right) e^{-\beta_l k \Delta t} \{ \cos (2\pi f_l k \Delta t) \pm i \sin (2\pi f_l k \Delta t) \} \end{aligned}$$

になる. さらに, 複素共役な根  $z_l^{(+)}$  と  $z_l^{(-)}$  について,

$$\begin{aligned} &D \left( z_l^{(+)} \right) \left( z_l^{(+)} \right)^k + D \left( z_l^{(-)} \right) \left( z_l^{(-)} \right)^k \\ &= \left\{ \operatorname{Re} \left[ D \left( z_l^{(+)} \right) \right] + i \operatorname{Im} \left[ D \left( z_l^{(+)} \right) \right] \right\} e^{-\beta_l k \Delta t} \{ \cos (2\pi f_l k \Delta t) + i \sin (2\pi f_l k \Delta t) \} \\ &\quad + \left\{ \operatorname{Re} \left[ D \left( z_l^{(-)} \right) \right] + i \operatorname{Im} \left[ D \left( z_l^{(-)} \right) \right] \right\} e^{-\beta_l k \Delta t} \{ \cos (2\pi f_l k \Delta t) - i \sin (2\pi f_l k \Delta t) \} \\ &= \left\{ \operatorname{Re} \left[ D \left( z_l^{(+)} \right) \right] + i \operatorname{Im} \left[ D \left( z_l^{(+)} \right) \right] \right\} e^{-\beta_l k \Delta t} \{ \cos (2\pi f_l k \Delta t) + i \sin (2\pi f_l k \Delta t) \} \\ &\quad + \left\{ \operatorname{Re} \left[ D \left( z_l^{(+)} \right) \right] - i \operatorname{Im} \left[ D \left( z_l^{(+)} \right) \right] \right\} e^{-\beta_l k \Delta t} \{ \cos (2\pi f_l k \Delta t) - i \sin (2\pi f_l k \Delta t) \} \\ &= 2 e^{-\beta_l k \Delta t} \left\{ \operatorname{Re} \left[ D \left( z_l^{(+)} \right) \right] \cos (2\pi f_l k \Delta t) - \operatorname{Im} \left[ D \left( z_l^{(+)} \right) \right] \sin (2\pi f_l k \Delta t) \right\} \end{aligned}$$

となる.

以上から (45) 式は,  $k \geq 1$  のとき,

$$\begin{aligned} C(k \Delta t) &= \sum_{j=1}^{m_1} \sigma^2 D \left( z_j^{(0)} \right) e^{-\alpha_j k \Delta t} \\ &\quad + \sum_{h=1}^{m_2} 2 \sigma^2 e^{-\beta_h k \Delta t} \left\{ \operatorname{Re} \left[ D \left( z_h^{(+)} \right) \right] \cos (2\pi f_h k \Delta t) - \operatorname{Im} \left[ D \left( z_h^{(+)} \right) \right] \sin (2\pi f_h k \Delta t) \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

と変形できる. これと (43) 式と比較すれば,

$$\begin{aligned} F_j &= \sigma^2 D \left( z_j^{(0)} \right) \\ G_l &= 2 \sigma^2 \operatorname{Re} \left[ D \left( z_l^{(+)} \right) \right] \\ H_l &= 2 \sigma^2 \operatorname{Im} \left[ D \left( z_l^{(+)} \right) \right] \end{aligned}$$

が導かれる.

## References

- [1] 日野 幹雄, スペクトル解析 (朝倉書店, 1977) .
- [2] 尾崎 統, 北川 源四郎 (編), 時系列解析の方法 (朝倉書店, 1998) .
- [3] 川嶋 弘尚, 酒井 英昭, 現代スペクトル解析 (森北出版, 2007) .